22/02/16

$V_A \xrightarrow{F} W_\Gamma$

$V_B \xrightarrow{F} W_\Delta$

$$[F]_A^\Gamma = [I]_\Delta^\Gamma \, [F]_B^\Delta \, [I]_A^B$$

Ορισμός: Δύο πίνακες $E, Z \in K$ λέγονται ισοδύναμοι αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q τέτοιοι ώστε $E = PZQ$

• E ισοδύναμος με τον Z είναι σχέση ισοδυναμίας

i) (ανακλαστική) $A \in K^{m\times n}$ $A = I_m A I_n$ άρα A ισοδύναμος με τον A

ii) (συμμετρική) A ισοδύναμος με το B $\Rightarrow$

$A = PBQ \Rightarrow P^{-1}\cdot A = P^{-1}\cdot P\cdot B\cdot Q \Rightarrow P^{-1}\cdot A = B\cdot Q \Rightarrow$

$P^{-1}\cdot A\cdot Q^{-1} = B\cdot Q\cdot Q^{-1} \Rightarrow B = P^{-1}\cdot A\cdot Q^{-1}$

iii) (μεταβατική)

A ισοδύναμος με $B \Rightarrow A = PBQ$, P, Q αντιστρέψιμοι

B ισοδύναμος με $\Gamma \Rightarrow B = R\Gamma S$, R, S αντιστρέψιμοι

$A = PBQ = P(R\Gamma S)Q$

$$A = \underbrace{P\cdot R}_{\substack{\text{αντιστρέψιμος} \\ m\times m}} \, \Gamma \, \underbrace{SQ}_{\substack{\text{αντιστρέψιμος} \\ n\times n}}$$

Πρόταση: Δύο πίνακες $A, B \in K^{m\times n}$ είναι ισοδύναμοι αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

Πρόταση. Έστω V, W δύο K-δ.χ. με διάσταση n και m αντίστοιχα.
Αν $f: V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις α και β των V και W αντίστοιχα τέτοιες ώστε

$$\underset{m\times n}{[f]_\alpha^\beta} = \left(\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & \underbrace{0}_{n-r} \end{array}\right)$$

όπου $r = \dim \operatorname{Im} f$.

Απόδειξη

$$\underset{n}{\dim V} = \underset{r}{\dim \operatorname{Im} f} + \underset{n-r}{\dim \operatorname{Ker} f}$$

Έστω $\{\vec{\gamma_1}, \dots \vec{\gamma_{n-r}}\}$ βάση του πυρήνα
$\vec{\gamma_1} \dots \vec{\gamma_{n-r}}$ βάση του πυρήνα άρα και Γ.Α. συνεπώς μπορώ να τα επεκτείνω σε μια βάση του V, την
$\alpha = \{\vec{\alpha_1}, \dots \vec{\alpha_r}, \vec{\gamma_1} \dots \vec{\gamma_{n-r}}\}$

$f(\vec{\alpha_1}) = 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \dots \pm \beta_1$

$f(\vec{\alpha_1}), f(\vec{\alpha_2}) \dots f(\vec{\alpha_r})$

$\operatorname{Im} f = \langle f(\vec{\alpha_1}), f(\vec{\alpha_2}), \dots f(\vec{\alpha_r}), f(\vec{\gamma_1}), \dots f(\vec{\gamma_{n-r}})\rangle = \dim \operatorname{Im} f$

$= \langle f(\vec{\alpha_1}) \dots f(\vec{\alpha_r}), \vec{0}, \dots \vec{0}\rangle = \langle f(\vec{\alpha_1}), \dots f(\vec{\alpha_r})\rangle$

Άρα τα $r = \dim \operatorname{Im} f$ διανύσματα $f(\vec{\alpha_1}), \dots f(\vec{\alpha_r})$ παράγουν την $\operatorname{Im} f$, άρα αποτελούν βάση της εικόνας

Άρα $f(\vec{\alpha_1}), \dots f(\vec{\alpha_r})$ Γ.Α. άρα μπορούμε να τα επεκτείνουμε σε μια βάση του W: $b = \{f(\vec{\alpha_1}) = \vec{b_1}, \dots f(\vec{\alpha_r}) = \vec{b_r}, \vec{b_{r+1}}, \dots \vec{b_m}\}$

$$[f]_{\alpha}^{\beta} = \begin{array}{ccccc} & & r \text{ θέση} & & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ f(\vec{\alpha_1}) & f(\vec{\alpha_2}) & f(\vec{\alpha_r}) & f(\vec{\gamma_1}) & \end{array}$$

$$V \xrightarrow{f} V$$

$\alpha = \{\vec{\alpha_1}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$ $\qquad$ $\alpha = \{\vec{\alpha_1}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$

βάση του V

$$V \longrightarrow V$$

$\beta = \{\vec{\beta_1}, \dots, \vec{\beta_n}\}$ $\qquad$ $\beta = \{\vec{\beta_1}, \dots, \vec{\beta_n}\}$

$n \times n$ $\qquad$ $n \times n$ $\qquad$ $n \times n$ $\qquad$ $n \times n$

$$[f]_{\alpha}^{\alpha} = [I]_{\beta}^{\alpha} \, [f]_{\beta}^{\beta} \, [I]_{\alpha}^{\beta}$$

$$\left([I]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1} = (I)_{\alpha}^{\beta}$$

Ορισμός: Δύο πίνακες $A, B \in K^{n \times n}$ λέγονται όμοιοι αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $A = PBP$.

Πρόταση: Η σχέση ομοιότητας στους πίνακες $K^{n \times n}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Άσκηση: Έστω $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με $\varphi(x,y,z) = (x-3y+3z,\ 3x-5y+3z,\ 6x-6y+4z)$

Βρείτε:

(i) Τον πίνακα A της φ στην κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Τον πίνακα B της φ στη βάση $\vec{b_1}=(1,1,0)$, $\vec{b_2}=(1,0,-1)$, $\vec{b_3}=(1,1,2)$

(iii) Βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιον ώστε $B = P^{-1}\cdot A \cdot P$.

(iv) Βρείτε το A^{2016}.

Λύση

i) $A = [\varphi]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

$\varphi(1,0,0) = (1,3,6)$
$\varphi(0,1,0) = (-3,-5,-6)$
$\varphi(0,0,1) = (3,3,4)$

ii) $B = [\varphi]_b^b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\varphi(\vec{b_1}) = \varphi(1,1,0) = (-2,2,0) = -2\vec{b_1}$
$\varphi(\vec{b_2}) = \varphi(1,0,-1) = (-2,0,2) = -2\vec{b_2}$
$\varphi(\vec{b_3}) = \varphi(1,1,2) = (4,4,8) = 4\vec{b_3}$

iii) $[\varphi]_b^b = [I]_\alpha^b [\varphi]_\alpha^\alpha [I]_b^\alpha$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P = [I]_b^\alpha$

$$P = [I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = [I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(1,0,0) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,-1) + \lambda_3(1,1,2)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + \lambda_3,\ -\lambda_2 + 2\lambda_3)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$(0,1,0) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,-1) + \lambda_3(1,1,2) \ \ldots$$

$$(0,0,1) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,-1) + \lambda_3(1,1,2) \ldots$$

iv) Πιο γενικά...

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix}^{2016} = \begin{pmatrix} \rho_1^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3^{2016} \end{pmatrix}$$

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

$$A^{2016} = (PBP^{-1})^{2016} = \underbrace{P \cdot B \cdot P^{-1} \cdot P \cdot B \cdot P^{-1} \cdot P \cdot B \cdot P^{-1} \cdots PBP^{-1}}_{2016} =$$

$$P \cdot \underbrace{B \cdot B \cdots \cdot B}_{2016} \cdot P^{-1} = P \cdot B^{2016} \cdot P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2016} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$